21/11/19

ΠΑΤ. (1) $\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Άμεση Euler

(2) $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$

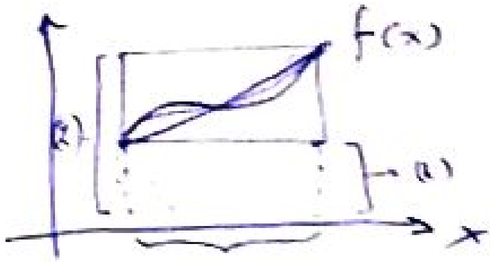
(άμεση / προσρ. 1 συν. υποθ.) (χαμηλή τάξη ακρ. / οχλεςL / ανάλυση)

: Explicit Euler

Πεπλεγμένη Μέθοδος Euler (implicit Euler)

$y' = f(t,y) \Rightarrow \dots \Rightarrow \dfrac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^{n+1}, y^{n+1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})$



$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s)\,ds = \begin{cases} h f(t^n) & (1) \\ h f(t^{n+1}) & (2) \\ \frac{h}{2}\left(f(t^{n+1}) + f(t^n)\right) & (3) \\ h\,\dfrac{f(t^{n+1}) + f(t^n)}{2} & (4) \end{cases}$$

(3) → 

(4) → 

$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$

Πρέπει να εξετάσω τα εξής:

- Συνέπεια (τοπ. σφάλμα)
- Ευστάθεια
- Ακρίβεια (ολ. σφάλμα)
- Περιοχή Απόλυτης Ευστάθειας

Παρατηρηση: Το y^{n+1} δινεται πεπλεγμένα, ο προσδιορισμός του απεττεί την επίλυση μιας μη γραμμικης εξισωσης.

Ερώτημα: Εξασφαλίζεται η Υ έ Μ της λύσης;

Παρατήρηση: Έστω ότι η f ικανοποιεί την Lipschitz. Τότε για αρκετά μικρό βήμα $(0<h<<1)$, τ.ω $hL<1$, οπου L η σταθερά Lipschitz. Δηλαδή:

$$\exists\, L\geq 0,\ \forall\, t\in[a,b],\ \forall\, y_1,y_2\in\mathbb{R}:$$

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq L|y_1-y_2|$$

Ορίζουμε:

$$g(x)=y^n+hf(t^{n+1},x),\ x\in\mathbb{R}$$

(θέλω να ειναι συνάρτηση συστολής, δηλ καθε νέο g να μικραίνει)

για $x,\tilde{x}\in\mathbb{R}$, $g(x)-g(\tilde{x})=y^n-y^n+hf(t^{n+1},x)$

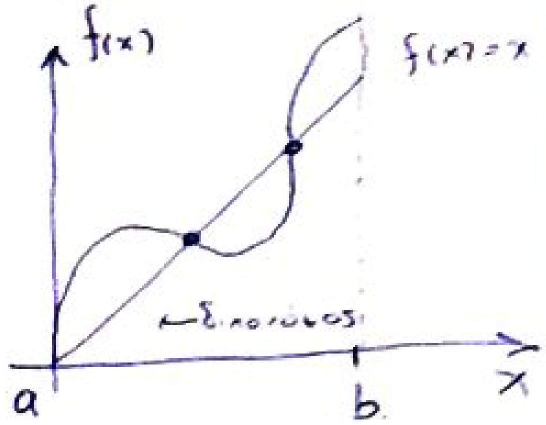
$$-hf(t^{n+1},\tilde{x})=h[f(t^{n+1},x)-f(t^{n+1},\tilde{x})]$$

$$\Rightarrow |g(x)-g(\tilde{x})|=h|f(t^{n+1},x)-f(t^{n+1},\tilde{x})|\leq$$

$$\leq hL|x-\tilde{x}|$$

δηλ. για $hL<1$ το g είναι συστολή, άρα θα έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο το y^{n+1}

Θεώρημα Σταθ. Σημείου



$\exists\ \xi \in [a,b]$ τω: $f(\xi)=\xi$.

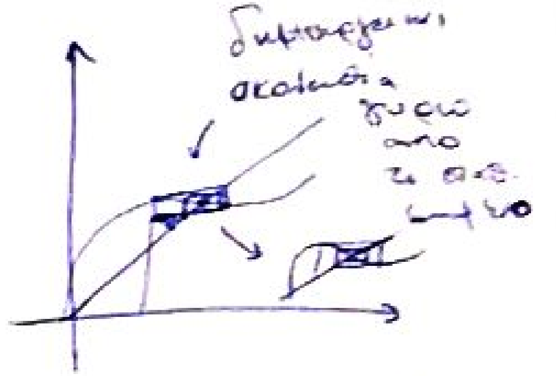
Απ. $g(x)=f(x)-x$

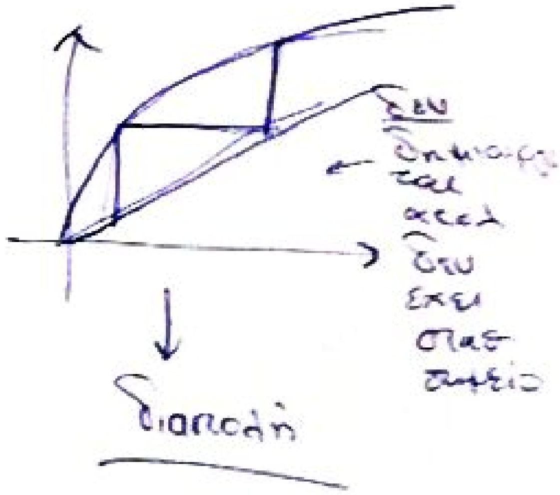
1η περ. $g(a)$, $g(b)$ είναι μηδέν (τότε είναι τα άκρα)

2η περ.

Αν όχι (a,b),

$g(a)\cdot g(b) \leq 0$ από Bolzano





(Σχόλιο: όσο τα $|x-\tilde{x}|$ μικραίνει τόσο το $|g(x)-g(\tilde{x})|$ μικραίνει μέχρι το $|x-\tilde{x}|$ να φτάσει στη λύση όπου το $|g(x)-g(\tilde{x})|$ πάει να μηδενιστεί)

Παρατήρηση

(1) $g(t,y)-y=0$

(2) Άρα το σύστημα (2) είναι καλώς ορισμένο και εξαρτάται από την f και το h.

Συνέπεια πεπλ. Euler: $\delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi^n)$, $\xi^n \in (t^n, t^{n+1})$

$$\delta^n = \underset{\substack{\text{αναλυτική}\\ \text{λύση}}}{y(t^{n+1})} - \underset{\substack{\text{αριθμ.}\\ \text{λύση}}}{y^{n+1}} = \text{Taylor} - y^n + h\underbrace{f(t^{n+1}, y^{n+1})}_{y'(t^{n+1})} = $$

$$= \frac{h^2}{2} y''(\xi^n)$$

Ευστάθεια πεπλ. Euler:

Θεωρούμε δύο Π.Α.Τ. με διαφορετικά Α.Σ.: $y^0 = y_0$, $z^0 = z_0$

$$\varepsilon^{n+1} = y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h\left[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1}) \right]$$

(Θέλω να δείξω ότι η διαφ είναι φραγμ.)

$$|\varepsilon^{n+1}| = |y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + h\left| f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1}) \right|$$

$$\le |y^n - z^n| + hL|y^{n+1} - z^{n+1}| \Rightarrow$$

(ισχύει πάνω στο πρώτο μέλος)

$$\Rightarrow (1 - hL)|y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le \frac{1}{1-hL} |y^n - z^n|$$

Αρχικά υποθ. ότι $hL \le \frac{1}{2}$. Τότε

$$\frac{1}{1-hL} \le 1 + 2hL, \quad |y^{n+1} - z^{n+1}| \le \frac{1}{1-hL}|y^n - z^n| \le (1+2hL)|y^n - z^n|$$

$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le (1+2hL)|y^n - z^n|$ Επαγωγικά:

$|y^{n+1} - z^{n+1}| \le (1+2Lh)^{n+1}|y^0 - z^0|$ ή

$|y^n - z^n| \le (1+2hL)^n |y^0 - z^0| \le e^{2hLn}|y^0 - z^0|$ άρα

όπου $n = N$: $\boxed{\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le e^{2L(b-a)}|y^0 - z^0|}$

Περιοχή Απόλυτης Ευστάθειας

(Αν με ρωτήσουν ποια η περιοχή απ. ευστ., θυμάμαι
το αντίστοιχο πρόβλημα δοκιμής.)

Πρόβλημα δοκιμής
$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \in [0, +\infty) \\ y(0) = 1, & \lambda \in \mathbb{C},\ Re(\lambda) < 0 \end{cases}$$

Τότε η πεπλ. Euler: $y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}) \Rightarrow$

$y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1} \Rightarrow (1-\lambda h) y^{n+1} = y^n \Rightarrow y^{n+1} = \frac{1}{1-\lambda h} y^n \Rightarrow$

Επαγωγικά: $\Rightarrow y^{n+1} = \left(\frac{1}{1-\lambda h}\right)^{n+1} y^0$ ή $y^n = \left(\frac{1}{1-\lambda h}\right)^n \cancel{y^0}^{\,1}$

άρα $y^n = \left(\frac{1}{1-\lambda h}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ (αφού $e^{\lambda t} \to 0$ για $t \to \infty$)

Η αναλυτική λύση: $y(t) = e^{\lambda t}$

Αυτό είναι εφικτό όταν το

$\left|\frac{1}{1-\lambda h}\right| \le 1$ ή $|1-\lambda h| \ge 1$ αν $z = \lambda h$ (μιγαδικός)

τότε $|1-z| \ge 1$, άρα η περιοχή απόλυτης ευστάθειας είναι η:

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |1-z| \ge 1 \},$$

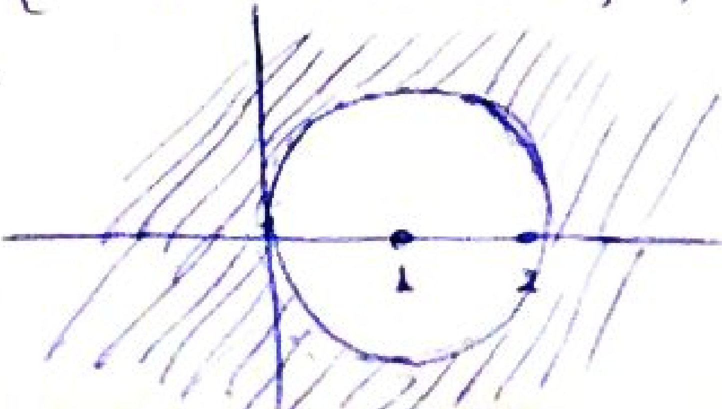
Σχηματικά.

$|1-z| < 1$

$-1 \le 1-z \le 1$

$-2 \le -z \le 0$

$0 \le z \le 2$



Άμεση Euler

Ακρίβεια μεθ. Euler

Έστω η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz με σταθερά L, και για h με $hL \leq \frac{1}{2}$, μπορούμε να δ.ο.:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq Ch$$

δηλ. η τάξη ακρίβειας είναι 1 : $O(h) = 1$.
(σφάλμα τάξης 2)

$$C = \frac{M}{2L}\left[e^{2L(b-a)} - 1\right], \quad M = \max_{t \in [a,b]} |y''(t)|.$$

Εφαρμογές:

(1) ΠΑΤ $= \begin{cases} y' = 1 - x\cos(xy) & x \in [0,2] \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Ν.δ.ο η f πληροί την Lipschitz ως προς y,
Είναι μοναδική η λύση;

Λη

Χαρακτηρίζω την εξίσωση: ΣΔΕ, $1^{ης}$ τ., $1^{ου}$ β, μη-γραμ.
μη ομ. (αφού έχει το 1)

$\exists\, \xi$ τ.ω.: $y_1 < \xi < y_2$:

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial y}(y_1 - y_2) \quad \text{(Θεωρ. Μέσης Τιμής)}$$

$$= x^2 \sin(\xi x)(y_1 - y_2)$$

$$\Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \underbrace{|x^2 \sin(\xi x)|}_{\text{αρκεί να δ.ο. είναι φραγμ.}} |y_1 - y_2|$$

Απδ : $|x^2 \sin(\xi x)| \leq 4 \cdot 1 = 4$

Άρα $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq 4|y_1 - y_2|$

Άρα πληροί την συνθήκη Lip. με $L = 4$.

Επειδή η f είναι (1) συνεχής συνάρτηση για $x \in [0,2]$ και $y \in \mathbb{R}$ και πληροί τη συνθήκη του Lipschitz τότε από Θ. Υ'Μ η λύση υπάρχει κ' είναι μοναδική

(2°) Να προσεγγισθεί η λύση του (1): $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ με άμεση Euler κ' αναπτ. Taylor 2ης τάξης μα ομοιομ. διαμ., h, στο [0,1] (h = 0,1). Τι παρατηρείτε; ,δη=, f βήμα.

Απ.

$t^0 = 0$, $y^0 = 1$ $\quad t^0=0 \quad t^1 \quad t^2 \quad t^3 \quad t^N = 1$

$t^1 = t^0 + h = 0.1$,

$t^2 = t^0 + 2h = 0,2$

$t^3 = t^0 + 3h = 0.3$

(1) Euler . $n=0$ $\quad y^1 = y^0 + hf(t^0, y^0) = 1 + 0.1 = 1.1$

$n=1$ δηλ t^2, $t^2 = t^0 + 2h = 0.2$: $y^2 = y^1 + hf(t^1, y^1) = 1.1 + (0.1) \cdot 1.1 = 1.21$

$n=3$, $t^3 = 0.3$: $y^3 = y^2 + hf(t^2, y^2) = 1.21 + (0.1)\, 1.21 = 1.331$

ακρίβεια Euler: $y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n) + O(h^2)$

το σφάλμα.

Taylor 2ης τάξης

↱ καλύτερη η Taylor.

$$y^{n+1} = y^n + h y^{n\prime} + \frac{h^2}{2} y^{n\prime\prime} + O(h^3)$$

$$y^{n+1} = y^n + h y^n + \frac{h^2}{2} y^n = y^n \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)$$

$t^0 = 0$, $y^0 = 1$

$t^1 = 0.1$, $n = 0$, $y^1 = y^0\left(1+h+\frac{h^2}{2}\right) + 1\left(1 + 0.1 + \frac{0.1^2}{2}\right) = 1.1050$

↓ πριν είχα 1.1

$t^2 = 0.2$, $n = 1$, $y^2 = y^1\left(1+h+\frac{h^2}{2}\right) = 1.1050\left(1+0.1+\frac{0.1^2}{2}\right)$
$= 1.2210$ (πριν 1.21)

$t^3 = 0.3$, $n = 2$, $y^3 = y^2\left(1+h+\frac{h^2}{2}\right)$
$= 1.3492$ (πριν 1.331)

Σε μορφή πίνακα:

n	t^n	αναλ. $y(t^n)$	Euler y^n	Taylor y^n	δ_E^n	δ_T^n
0	0	1	1	1	0	0
1	0.1	1.1052	1.1000	1.1050	0.0052	0.0002
2	0.2	1.2214	1.2100	1.2210	0.0114*	0.0004
3	0.3	1.3498	1.3310	1.3492	0.0188	0.0006

μικρότερο σφάλμα από Euler

↑ τα βήματα που κάνω

↑ τα χρονικά βήματα

Το taylor 2ης τάξης είναι καλύτερο αριθμ. σχήμα σε σχέση με τον Euler.

* τα σφάλματα είναι στο σωστό δεκαδικό ψηφίο